

## 0. Einführung Mengenlehre



### Aus dem Lehrplan PLUS:

„Die Schülerinnen und Schüler begründen die Notwendigkeit, die Menge der reellen Zahlen zur Menge der komplexen Zahlen zu erweitern, und sind sich der kulturhistorischen Bedeutung dieser Zahlbereichserweiterung bewusst.“

### Anknüpfung an Lehrplaninhalte früherer Jahrgangsstufen:

„Die Schülerinnen und Schüler beschreiben die Zusammenhänge zwischen den natürlichen, den ganzen und den rationalen Zahlen und erläutern wesentliche Unterschiede zwischen den entsprechenden Zahlenmengen.“ – 6. Jgst.

„Die Schülerinnen und Schüler erkennen und nutzen Rechenvorteile, die sich durch Anwendung von Kommutativ- und Assoziativgesetz bzw. dadurch ergeben, dass man die hinsichtlich des Rechenaufwands jeweils günstigste Darstellungsform rationaler Zahlen für die Berechnung auswählt.“ – 6. Jgst.

„Die Schülerinnen und Schüler verstehen das Grundprinzip eines indirekten Beweises [...] dabei erfassen sie auch, dass das Beweisen eine zentrale Bedeutung für die Mathematik und deren stringenten Aufbau hat. Sie begründen die Notwendigkeit, die Menge der rationalen Zahlen zu erweitern, nennen Quadratwurzeln und andere irrationale Zahlen (u. a.  $\pi$ ) als Beispiele reeller nicht rationaler Zahlen und sind sich der kulturhistorischen Bedeutung dieser Zahlbereichserweiterung bewusst.“ – 9. Jgst.

„Die Schülerinnen und Schüler fassen in dem Bewusstsein, dass die bekannten Rechengesetze auch in der erweiterten Zahlenmenge gelten, in fortlaufender, klar strukturierter Rechnung bei Termen angemessener Komplexität Produkte, Quotienten, Summen und Differenzen von Quadratwurzeln zusammen [...]. Ihre Rechenschritte erläutern sie unter gezielter Verwendung von Fachbegriffen; diese setzen sie auch im Rahmen einer fundierten Analyse von Rechenwegen gezielt ein.“ – 9. Jgst.

### 0.1. Mengen und Zahlenbereiche

Die Mengenlehre bildet die Basis vieler mathematischer Konzepte.

#### Definition 1 – Menge

Unter einer **Menge M** versteht man die Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte, die zu einer Menge zusammengefasst werden, heißen **Elemente** dieser Menge.

Es gibt endliche und unendliche Mengen. Die Elemente kleiner endlicher Mengen werden wie folgt notiert:  $M = \{m_1, m_2\}$ , wenn  $m_1$  und  $m_2$  zur Menge  $M$  gehören. Um aufzuzeigen, dass ein Element in einer Menge liegt, schreibt man:  $m \in M$ , falls  $m$  ein Element von  $M$  ist.



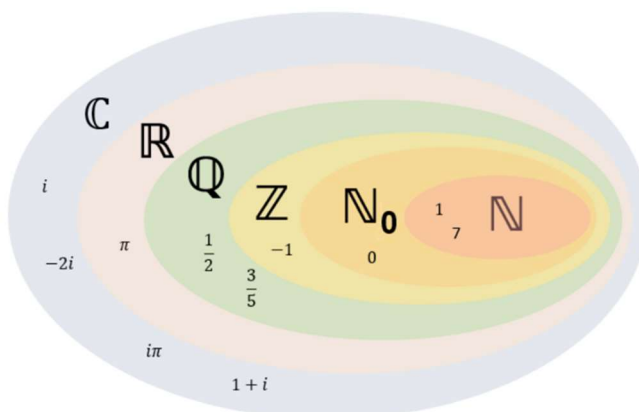
**Beispiel:** Mengen begegnen uns häufig im Alltag, auch wenn wir diese nicht so bewusst wahrnehmen. Auf vielen Stellenangeboten findet man beispielsweise die Bezeichnungen  $m, w, d$ . Dies lässt sich als Menge der Geschlechteridentitäten  $G$  auffassen. Die Menge  $G$  der Geschlechteridentitäten ist damit endlich. Ihre Elemente werden wie folgt notiert:

$$G = \{m, w, d\}.$$

Mithilfe dieser Notation wollen wir im Folgenden die aus der Schule bekannten Zahlenmengen betrachten:

Die aus dem Alltag bekannten Zahlen 1, 2, 3, ... stellen auch eine Menge dar. Diese bezeichnet man als **natürliche Zahlen** und fasst sie mit dem Mengensymbol  $\mathbb{N}$  zusammen. Hierbei handelt es sich um eine unendliche Menge. Möchte man diese Menge um das Element 0 erweitern, schreibt man  $\mathbb{N}_0$ .

Die **ganzen Zahlen**  $\mathbb{Z}$  umfassen zusätzlich auch die negativen Zahlen.



Durch Betrachtung von Quotienten beliebiger ganzer Zahlen erhält man die **rationalen Zahlen**  $\mathbb{Q}$ , die manchmal auch in der Alltagssprache als Bruchzahlen bezeichnet werden. Jede rationale Zahl kann sowohl als Bruch als auch als periodische Dezimalzahl dargestellt werden.

Es gibt aber auch unendliche, nicht-periodische Dezimalzahlen wie  $\sqrt{2}$  oder  $\pi$ . Diese nennt man irrational. Die Gesamtheit aus rationalen und irrationalen Zahlen bildet die Menge der **reellen Zahlen**  $\mathbb{R}$ . Diese können wiederum zu den **komplexen Zahlen**  $\mathbb{C}$  erweitert werden (s. Kapitel 1.1).

Bisher haben wir von der Erweiterung von Mengen gesprochen, entsprechend lässt sich auch der Blick zurückwerfen. Hierfür definieren wir die sogenannte Teilmenge:

#### Definition 2 – Teilmenge

Eine Menge  $T$  heißt **Teilmenge** einer Menge  $M$ , wenn jedes Element von  $T$  auch ein Element von  $M$  ist

$$T \subseteq M \Leftrightarrow \forall t: (t \in T \Rightarrow t \in M).$$

Für die oben betrachteten Zahlenmengen gilt dabei  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

## 0.2. Weitere algebraische Strukturen

Im Folgenden möchten wir uns näher mit algebraischen Strukturen, im Allgemeinen einer Menge und Operationen beschäftigen, z.B.  $\mathbb{N}$  und Addition. Wir unterscheiden vier Grundrechenarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, für die gewisse Regeln gelten.

Eine Gruppe ist eine grundlegende algebraische Struktur, die in vielen Bereichen der Mathematik und Physik Anwendung findet. Gruppen werden verwendet, um Symmetrien zu beschreiben, etwa in der Geometrie oder der Theorie der Differentialgleichungen.

#### Definition 3 – Gruppe

Eine **Gruppe**  $(G, *)$  ist ein Paar aus einer Menge  $G$  und einer Verknüpfung  $*$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (G1)  $*: G \times G \rightarrow G$  (**Abgeschlossenheit**)
- (G2) Es gilt das **Assoziativgesetz**, d.h. es ist  $(a * b) * c = a * (b * c)$  für alle  $a, b, c \in G$
- (G3) Es gibt ein **neutrales Element**  $e \in G$  für die Verknüpfung  $*$ , d.h. es ist  $e * a = a * e = a$  für alle  $a \in G$
- (G4) Zu jedem  $a \in G$  gibt es ein **inverses Element**  $b \in G$  mit  $a * b = b * a = e$



**Beispiel:** Die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  mit der Addition  $+$  als Verknüpfung bildet eine Gruppe.

**G1:** Die Summe zweier ganzer Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  ist wieder eine ganze Zahl:

$$a + b \in \mathbb{Z} \text{ (Abgeschlossenheit)}$$

**G2:** Die Reihenfolge der Ausführung der Addition spielt keine Rolle (Assoziativität):

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

**G3:** Die Zahl 0 ist das neutrale Element der Addition, da es gilt:

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ (Neutrales Element).}$$

Eine Gruppe  $(G, *)$  heißt **abelsche** oder **kommutative Gruppe**, falls zusätzlich das **Kommutativgesetz** gilt.



**Beispiel:** Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  mit der Multiplikation  $\cdot$  als Verknüpfung ist keine Gruppe, da 0 kein multiplikatives Inverses besitzt. Hingegen ist  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  eine abelsche Gruppe.

#### Definition 4 – Körper

Ein **Körper** ist eine algebraische Struktur, die sowohl die Addition als auch die Multiplikation vollständig integriert. Ein Körper  $(K, +, \cdot)$  hat die folgenden Anforderungen:

(K1) Mit der Verknüpfung  $+$  ist  $K$  eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element dieser Verknüpfung wird mit 0 bezeichnet und heißt die Null von  $K$ .

(K1) Die Menge  $K \setminus \{0\}$  mit der Verknüpfung  $\cdot$  ist eine abelsche Gruppe, und diese Verknüpfung ist auf der gesamten Menge  $K$  kommutativ. Das neutrale Element dieser Verknüpfung wird mit 1 bezeichnet und heißt die **Eins** von  $K$ .

(K2) Es gilt das **Distributivgesetz**: Für alle  $a, b, c \in K$  gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$



**Beispiel:** Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  mit der Addition  $+$  und Multiplikation  $\cdot$  als Verknüpfungen ist ein Körper.

### 0.3. Abbildungen in algebraischen Strukturen

Ein **Isomorphismus** ist eine Abbildung zwischen zwei algebraischen Strukturen mit speziellen Eigenschaften. Für uns ist es zunächst ausreichend, wenn wir einen Isomorphismus als Abbildung zwischen zwei algebraischen Strukturen auffassen, die deren Eigenschaften bewahrt.

Zwei Strukturen  $A$  und  $B$  heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung  $f: A \rightarrow B$  gibt, die die Verknüpfungen respektiert. Das bedeutet:

- i. Für Gruppen  $(G, *)$  und  $(H, \circ)$  gilt:  $f: a * b = f(a) \circ f(b)$  für alle  $a, b \in G$ .
- ii. Für Ringe und Körper müssen sowohl die Additions- als auch die Multiplikationsverknüpfungen erhalten bleiben.

Isomorphismen ermöglichen es, Strukturen auf verschiedene Weise darzustellen, was in der Mathematik und ihren Anwendungen von großem Nutzen ist.

# 1. Herleitung der komplexen Zahlen



## Aus dem Lehrplan PLUS:

„Schülerinnen und Schüler begründen die Notwendigkeit, die Menge der reellen Zahlen zur Menge der komplexen Zahlen zu erweitern, und sind sich der kulturhistorischen Bedeutung dieser Zahlbereichserweiterung bewusst.“

## 1.1. Gleichung $x^2 + 1 = 0$

Betrachten wir die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  in  $\mathbb{R}$ , so löst kein  $x \in \mathbb{R}$  diese Gleichung.

Wie auch bei der Erweiterung der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen nehmen wir an, dass diese Gleichung in einer größeren Menge eine Lösung hat. Wir bezeichnen diese Lösung als  $i$ . Die Menge der komplexen Zahlen ist dann eine natürliche Erweiterung der Menge der reellen Zahlen.

Eine komplexe Zahl ist definiert als ein Tupel  $z = (a, b)$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  sind.

Auf der Menge der komplexen Zahlen werden eine Addition und Multiplikation wie folgt definiert:

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$z_1 z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Für eine komplexe Zahl  $z = (a, b)$  ist  $a$  der **Realteil** und  $b$  der **Imaginärteil**. Sie werden als  $Re(z)$  und  $Im(z)$  bezeichnet. Wenn  $Re(z) = 0$  gilt, dann ist  $z$  **rein imaginär**, und wenn  $Im(z) = 0$  gilt, dann ist  $z$  **reell**. Die Zahl  $(0, 1)$  wird mit  $i$  bezeichnet (**imaginäre Einheit**) und ist rein imaginär.

Mit dieser Notation kann eine komplexe Zahl  $z = (a, b)$  geschrieben werden als

$$z = a + ib,$$

welches die übliche Notation (**algebraische Darstellung**) ist und umgänglicher beim Rechnen ist als die Notation mit  $(a, b)$ .

Mit Anwendung der Definition des Produkts ist zu sehen, dass die Gleichung

$$i^2 = -1;$$

*alternativ in der Tupelschreibweise*

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (0 - 1, 0) = (-1, 0)$$

valide ist. Dies wird oft als die wichtigste Gleichung in der komplexen Analysis gesehen.

Weiter definieren wir die komplexe Konjugation  $\overline{\phantom{x}}$ . Für  $z = a + ib$  gilt:

$$\bar{z} = a - ib.$$

$\bar{z}$  wird dabei als das **komplex Konjugierte** einer komplexen Zahl  $z$  bezeichnet.

Nun stellt sich die Frage, welche Eigenschaften die Menge  $\mathbb{C}$  hat, und vor allem, ob der Körper  $\mathbb{R}$  zu einem Körper  $\mathbb{C}$  erweitert wurde. Dass dies der Fall ist, werden wir im Folgenden beweisen:

**i Beweis der Aussage:** Der Körper  $\mathbb{R}$  lässt sich zu einem Körper  $\mathbb{C}$  erweitern.

Die in  $\mathbb{C}$  definierte Addition ist identisch mit der Addition im Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  (d.h. der komponentenweisen Addition). Daher ist  $(\mathbb{C}, +)$  eine abelsche Gruppe mit dem Nullelement  $(0,0)$ . Die Multiplikation ist kommutativ, und  $(1,0)$  ist ein neutrales Element. Es sei ein Element  $(a, b) \neq (0,0)$  in  $\mathbb{C}$  gegeben. Dann gilt  $a^2 + b^2 > 0$ .

Daher ist

$$(a, b)^{-1} := \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \quad (3.1)$$

ein wohldefiniertes Element von  $\mathbb{C}$ . Aus der Definition der Multiplikation in  $\mathbb{C}$  folgt

$$(a, b) \cdot (a, b)^{-1} = \left( a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}, -a \cdot \frac{b}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$$

Somit ist jedes von Null  $(0,0)$  verschiedene Element aus  $\mathbb{C}$  bezüglich der Multiplikation invertierbar. Der Nachweis der Assoziativität der Multiplikation ist aufwendig. (Dies ist eine der eher seltenen Situationen, in denen man das Assoziativgesetz wirklich nachprüfen muss und es nicht von vornherein „offensichtlich“ ist).

Man berechnet für alle  $(a, b), (c, d), (x, y) \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (x, y) &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (x, y) \\ &= (acx - bdx - ady - bcy, acy - bdy + adx + bcx) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (x, y)) &= (a, b) \cdot (cx - dy, cy + dx) \\ &= (acx - ady - bcy - bdx, acy + adx + bcx - bdy) \end{aligned}$$

also

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (x, y) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (x, y)).$$

Dies zeigt die Assoziativität der Multiplikation. Die Gültigkeit des Distributivgesetzes ergibt sich aus

$$\begin{aligned} ((a, b) + (c, d)) \cdot (x, y) &= (a + c, b + d) \cdot (x, y) \\ &= (ax + cx - by - dy, ay + cy + bx + dx) \\ &= (ax - by, ay + bx) + (cx - dy, cy + dx) \\ &= (a, b) \cdot (x, y) + (c, d) \cdot (x, y). \end{aligned}$$

Damit haben wir die Aussage, dass die komplexen Zahlen  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  als Erweiterung der reellen Zahlen  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ein Körper sind, bewiesen.

■

## 2. Darstellung der komplexen Zahlen



### Aus dem Lehrplan PLUS:

„Die Schülerinnen und Schüler stellen komplexe Zahlen in der algebraischen Form  $z = a + bi$  dar, berechnen die Werte von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten zweier komplexer Zahlen und deuten Addition und Subtraktion geometrisch mithilfe der Darstellung als Vektoren in der Gauß'schen Zahlenebene.“

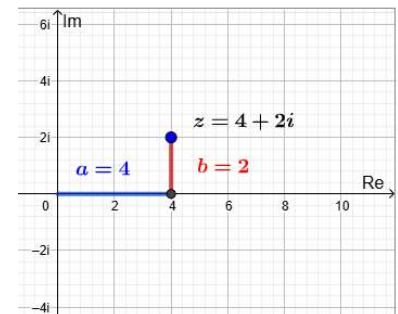
„Die Schülerinnen und Schüler stellen komplexe Zahlen in der Polarform  $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$  dar, wechseln sicher zwischen dieser und der algebraischen Form und deuten Multiplikation und Division geometrisch. Sie entscheiden bei Berechnungen reflektiert, welche Darstellungsform jeweils vorteilhaft ist.“

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die komplexen Zahlen darzustellen:

- algebraische Darstellung:  $z = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$
- Tupel:  $z = (a, b)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$
- Polarkoordinaten (siehe 2.2)
- Matrizendarstellung (siehe 2.3)

### 2.1. Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene

Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind ein 2-dimensional reeller Vektorraum mit der festen Basis  $\{1, i\}$ . Entsprechend zur Darstellung der reellen Zahlen auf einer Geraden, stellt man die komplexen Zahlen als Punkte in einer Ebene dar. Diese wird als **Gauß'sche Zahlenebene** bezeichnet. Sie lässt sich mit einem kartesischen Koordinatensystem, bei dem an der reellen Achse der Realteil (horizontale Achse) und an der imaginären Achse der Imaginärteil (vertikale Achse) abgetragen wird, darstellen.



Die Gauß'sche Zahlenebene ist isomorph zu  $\mathbb{R}^2$ . Hier wird das Tupel  $(a, b) \in \mathbb{C}$  auf den Vektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  abgebildet. Somit können die komplexen Zahlen als Punkte oder Vektoren einer zweidimensionalen Ebene (komplexe Ebene) verstanden werden, wobei die horizontale Achse die reelle Achse und die vertikale Achse die imaginäre Achse ist. Folglich sind die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von komplexen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene analog zur Vektoraddition, -subtraktion, -multiplikation und -division in  $\mathbb{R}^2$ . In der gauß'schen Zahlenebene wird jedoch der ‚Vektor‘ als **Zeiger** bezeichnet.

Neben diesen Operationen betrachten wir in  $\mathbb{R}^2$  die Länge der Vektoren. Graphisch ist dies der (euklidische) Abstand des Punktes zum Nullpunkt. In der Darstellung der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  in der Gauß'schen Zahlenebene wird dies als **Betrag** bezeichnet und berechnet sich analog zur Länge eines Vektors in  $\mathbb{R}^2$ . Folglich berechnet sich der Betrag jeder komplexen Zahl  $z = (a, b)$  mit  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Die **komplexe Konjugation**  $\bar{z}$  entspricht graphisch gesehen der Spiegelung eines Punktes an der reellen Achse.



**Beispiel:** Das komplex Konjugierte von  $i$  ist  $\bar{i} = -i$ , d.h. der Punkt  $(0, 1)$  wird auf den Punkt  $(0, -1)$  gespiegelt.

## 2.2. Darstellung als Polarkoordinaten

Das **Argument** von  $z$ , bezeichnet als  $\arg(z)$ , ist der gerichtete Winkel zwischen der reellen Achse und dem Ortsvektor des Punktes  $z$  in der komplexen Ebene. Das Argument kann jegliche reellen Werte annehmen und damit positiv oder negativ (oder Null) sein. Wenn  $z = a + ib$  gilt und wir  $\phi := \arg(z)$  setzen, dann ist nach der Definition des Tangens die Gleichung  $\tan \phi = \frac{b}{a}$  erfüllt.

Das Argument ist aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen nicht eindeutig, aber Argumente zwischen  $0$  und  $2\pi$  oder zwischen  $-\pi$  und  $\pi$  werden am häufigsten benutzt. Wenn Winkel zwischen  $-\pi$  und  $\pi$  benutzt werden, dann gilt für das Argument der komplexen Zahl  $z = a + ib$ :

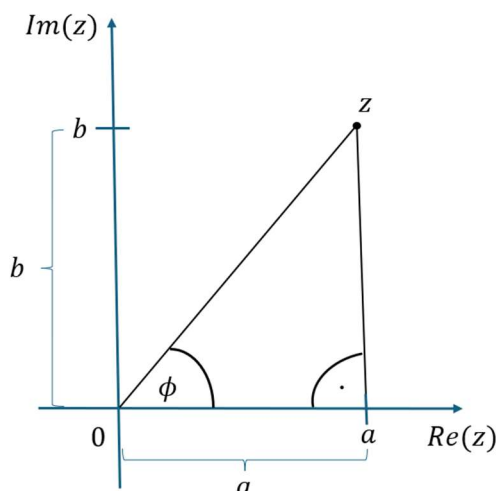
- Für  $a > 0$ :  $\arg(z) = \arctan \frac{b}{a}$
- Für  $a < 0, b \geq 0$ :  $\arg(z) = \pi + \arctan \frac{b}{a}$
- Für  $a < 0, b < 0$ :  $\arg(z) = -\pi + \arctan \frac{b}{a}$

Wenn  $a = 0$  vorliegt, liegt die komplexe Zahl auf der imaginären Achse, womit das Argument für  $b > 0$  genau  $\frac{\pi}{2}$  bzw. für  $b < 0$  genau  $-\frac{\pi}{2}$  beträgt.

Jede komplexe Zahl lässt sich zudem in **Polarform** angeben, die auf ihrem Betrag, ihrem Argument und den Definitionen von Sinus und Cosinus am rechtwinkligen Dreieck basiert.

**i Beweis der Aussage:** Jede komplexe Zahl lässt sich in Polarform angeben.

Wir betrachten eine beliebige komplexe Zahl  $z = a + ib$  in der gaußschen Zahlenebene. Die



Hypotenuse im eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck ist der Abstand von  $z$  zum Nullpunkt, also  $|z|$ . Durch die bekannten Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck erhält man:

$$\sin \phi = \frac{b}{|z|} \text{ sowie } \cos \phi = \frac{a}{|z|}.$$

Daraus folgt:  $b = |z| \sin \phi$  und  $a = |z| \cos \phi$ .

Damit ergibt sich die Polarform:

$$\begin{aligned} z = a + ib &= |z| \cos \phi + i |z| \sin \phi \\ &= |z| (\cos \phi + i \sin \phi) \end{aligned}$$

Diese Darstellung der komplexen Zahlen in Polarform ist insbesondere für den Anwendungsbereich der Mathematik (wie z.B. in der Physik und der Elektrotechnik) wichtig. Die Darstellung der komplexen Zahlen in Polarform bietet demnach vielfältige Möglichkeiten für einen fächerübergreifenden Unterricht. Hierfür sollte kurz erwähnt werden, dass die imaginäre Einheit, die in der Mathematik mit  $i$  bezeichnet wird, in den Anwendungsgebieten oftmals eher mit  $j$  angegeben wird.

Die Polarform kann durch Anwenden der **Eulerschen Formel** (nach Leonard Euler, 1748)

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

auch in eine exponentielle Form gebracht werden:  $z = |z|e^{i\phi}$ .

Die Eulersche Formel kann bewiesen werden, wenn wir zuerst die Potenzreihen-Darstellung der Exponentialfunktion  $e^{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!}$  für komplexe Exponenten erweitern und dann die Darstellung der Potenzreihen für Sinus und Cosinus anwenden.



**Beispiel:** Wenn  $z = -2 + i2\sqrt{3}$ , dann ist:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

Das Argument ist der Winkel  $\phi$ , sodass  $\tan \phi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$  gilt. Da wegen  $\operatorname{Re}(a) = -2$  der Realteil negativ ist, gilt:

$$\arg(z) = \pi + \arctan(-\sqrt{3}) = \pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Somit ist die exponentielle Form

$$z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Durch Anwenden der exponentiellen Form erhält man

$$z^n = |z|^n e^{in\phi} = |z|^n (\cos n\phi + i \sin n\phi).$$

Wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus gilt mit  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$|z|e^{i(\phi+2n\pi)} = |z|e^{i\phi}.$$

### 2.3. Darstellung als Matrizen



#### Anknüpfung an das Modul „Matrizen“ aus dem Vertiefungskurs:

„Schülerinnen und Schüler addieren Matrizen und multiplizieren Matrizen mit einem Skalar. Sie berechnen das Produkt zweier Matrizen und deuten im Falle quadratischer Matrizen diese Multiplikation und ihr Ergebnis im Zusammenhang mit mehrstufigen Prozessen.“

„Schülerinnen und Schüler erläutern, inwieweit Rechengesetze, die sie für die Multiplikation reeller Zahlen kennen, auch für die Matrizenmultiplikation zutreffen, bestimmen von invertierbaren Matrizen das Inverse und deuten dieses im Zusammenhang mit Übergangsprozessen“

Wenn man die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen nicht eigens definieren, sondern die (bereits bekannten) Rechenoperationen von Matrizen verwenden möchte, kann man die komplexen Zahlen auch mit der Matrizendarstellung einführen:

Die Menge der  $(2 \times 2)$ -Matrizen der Form

$$Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot E + b \cdot I$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$  bildet ein Modell der komplexen Zahlen, weil diese Menge isomorph zum Körper der komplexen Zahlen ist. Damit können wir die Zahlenmenge  $\mathbb{C}$  auch als die Menge der Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

definieren. Diese Menge ist ein Unterraum des Vektorraums der reellen  $(2 \times 2)$ -Matrizen, denn eine reelle Zahl  $a$  entspricht der Diagonalmatrix  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .

Die reelle Einheit 1 bzw. die imaginäre Einheit  $i$  werden durch die Einheitsmatrix  $E$  bzw. die Matrix  $I$  dargestellt. Daher gilt  $\operatorname{Re}(Z) = a, \operatorname{Im}(Z) = b, I^2 = -E$ .

Die Multiplikation von komplexen Zahlen entspricht der Matrizenmultiplikation. Die zu den Matrizen gehörenden linearen Abbildungen sind Drehstreckungen im  $\mathbb{R}^2$  (sofern  $a$  und  $b$  nicht beide Null sind). Diese Drehstreckungen entsprechen der Multiplikation mit einer komplexen Zahl in der gaußschen Zahlenebene.

Damit beschreibt die Matrix

$$Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

eine Drehstreckung mit Faktor  $r$  und Winkel  $\phi$  im mathematisch positiven Sinne (also entgegen dem Uhrzeigersinn).